

© International Baccalaureate Organization 2023

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2023

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2023

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Matemáticas: Análisis y Enfoques

Nivel Superior

Prueba 1

30 de octubre de 2023

Zona A tarde | Zona B tarde | Zona C tarde

Número de convocatoria del alumno

2 horas

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.



No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.



No escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

10. [Puntuación máxima: 15]

Las funciones f y g vienen dadas por

$$f(x) = \ln(2x - 9), \text{ donde } x > \frac{9}{2}$$

$$g(x) = 2 \ln x - \ln d, \text{ donde } x > 0, d \in \mathbb{R}^+.$$

(a) Indique la ecuación de la asíntota vertical del gráfico de $y = g(x)$. [1]

Los gráficos de $y = f(x)$ e $y = g(x)$ se cortan en dos puntos distintos.

(b) (i) Muestre que, en esos puntos de intersección, se cumple que $x^2 - 2dx + 9d = 0$.

(ii) A partir de lo anterior, muestre que $d^2 - 9d > 0$.

(iii) Halle el intervalo de posibles valores de d . [9]

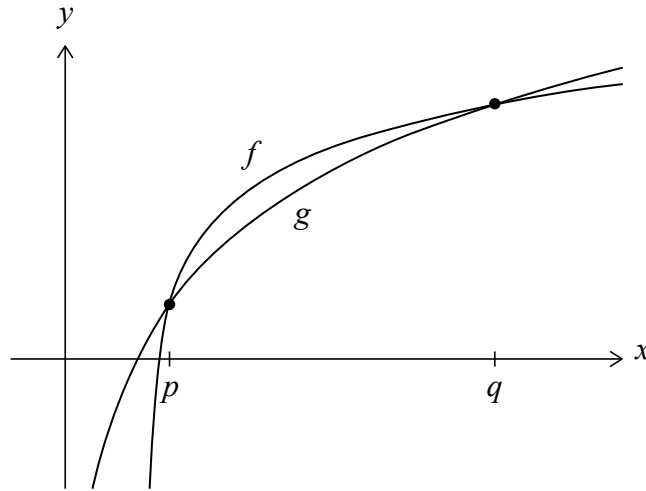
(Esta pregunta continúa en la página siguiente)



No escriba soluciones en esta página.

(Pregunta 10: continuación)

La siguiente figura muestra una parte de los gráficos de $y = f(x)$ e $y = g(x)$.



Los gráficos se cortan en $x = p$ y $x = q$, donde $p < q$.

- (c) Para el caso en el que $d = 10$, halle el valor de $q - p$. Exprese la respuesta en la forma $a\sqrt{b}$, donde $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

[5]



No escriba soluciones en esta página.

11. [Puntuación máxima: 21]

Considere la función $f(x) = e^{\cos 2x}$, donde $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$.

- (a) Halle las coordenadas de los puntos de la curva $y = f(x)$ donde la pendiente es cero. [5]
- (b) Utilizando la derivada segunda en cada uno de los puntos hallados en el apartado (a), muestre que la curva $y = f(x)$ tiene dos máximos locales y un mínimo local. [4]
- (c) Dibuje aproximadamente la curva de $y = f(x)$ para $0 \leq x \leq \pi$, teniendo presentes los valores relativos de la derivada segunda que halló en el apartado (b). [3]
- (d)
 - (i) Halle la serie de Maclaurin correspondiente a $\cos 2x$, llegando hasta (e incluyendo) el término en x^4 .
 - (ii) A partir de lo anterior, halle la serie de Maclaurin correspondiente a $e^{\cos 2x - 1}$, llegando hasta (e incluyendo) el término en x^4 .
 - (iii) A partir de lo anterior, escriba la serie de Maclaurin correspondiente a $f(x)$, llegando hasta (e incluyendo) el término en x^4 . [6]
- (e) Utilice los dos primeros términos distintos de cero de la serie de Maclaurin correspondiente a $f(x)$ para mostrar que $\int_0^{1/10} e^{\cos 2x} dx \approx \frac{149e}{1500}$. [3]



No escriba soluciones en esta página.

12. [Puntuación máxima: 17]

- (a) Halle el desarrollo de la potencia de un binomio para $(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^5$. Dé la respuesta en la forma $a + bi$ donde a y b se han de expresar en función de $\operatorname{sen} \theta$ y $\cos \theta$. [4]
- (b) Utilizando el teorema de De Moivre y la respuesta dada en el apartado (a), muestre que $\operatorname{sen} 5\theta \equiv 16 \operatorname{sen}^5 \theta - 20 \operatorname{sen}^3 \theta + 5 \operatorname{sen} \theta$. [6]
- (c) (i) A partir de lo anterior, muestre que $\theta = \frac{\pi}{5}$ y $\theta = \frac{3\pi}{5}$ son soluciones de la ecuación $16 \operatorname{sen}^4 \theta - 20 \operatorname{sen}^2 \theta + 5 = 0$.
- (ii) A partir de lo anterior, muestre que $\operatorname{sen} \frac{\pi}{5} \operatorname{sen} \frac{3\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}}{4}$. [7]
-



No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.



16EP16